**2 Dimensional Area Packing**

**2-Dimensional Bin Packing**

**Two Dimensional Irregular Cutting Stock Problem**

Задача нерегулярного размещения геометрических объектов на плоскости (**Two Dimensional Irregular Cutting Stock Problem, ICSP(2D)**) рассматривается в следующей постановке: имеется область упаковки Ω вида:

и множество прямоугольных геометрических объектов P = {p1,…,pn}. Положение объекта pi в области Ω задается параметрами размещения (xi, yi), i = 1,2,…,n. Метрические характеристики объекта pi (ai, bi), i = 1,2,…,n являются переменными, изменяющимися в диапазоне:

,

,

,

.

здесь

*li\_min* – это минимальное значение стороны объекта pi,

*Si\_max –* максимальное значение площади объекта pi.

Площадь Si объекта pi тоже изменяется в диапазоне:

Некоторые объекты pi из множества P имеют фиксированную площадь, т.е. i = 1…k, k < n.

Таким образом вектор независимых переменных задачи имеет вид:

У каждого геометрического объекта *pi* есть "оболочка" *si*, которая представляет из себя набор из четырех прямоугольников, смежных с каждым из ребер объекта *pi*, как изображено на рис. 1. У каждого из прямоугольников оболочки *si* одно ребро имеет размер – 1 метр, а второе - *ai* или*bi*, в зависимости от того, какой из граней объекта *pi* принадлежит данный прямоугольник. Координаты точек, описывающих оболочку *si* легко находятся из параметров (xi, yi, ai, bi)



Рис. 1 Оболочка si геометрического объекта pi

Оптимизационная задача формулируется следующим образом:

*Необходимо разместить множество геометрических объектов P в области упаковки Ω без взаимных пересечений таким образом, чтобы обеспечить максимально плотную упаковку, т.е.:*

где *SΩ* - это площадь области упаковки *Ω,* а область допустимых решений *D = D1⋂ D2* определяется условиями вида:

D1: *pi* *pj =* ,

D2: *pi ⊆ Ω,*

*i, j = 1,2,…,n; i ≠ j*

Следует также отметить, что при размещении геометрических объектов должен быть соблюден ряд дополнительных условий, связанных со спецификой поставленной задачи, а именно:

1. Геометрический объект p1 (прихожая) должен быть размещен смежно с фиксированной областью эвакуации (лестничной клеткой) на отрезке не менее 1 метра:

*R1 -* подмножество граничных точек геометрического объекта *p1*,

*Re* – подмножество граничных точек фиксированной области эвакуации.

1. Геометрические объекты должны быть смежными со специальными точечными областями:

*Re* – множество специальных точечных областей (оконные проемы).

1. Площадь оболочки каждого из размещаемых геометрических объектов, кроме p1, должна быть не менее 1 кв.м.:

где *Ssi –* площадь оболочки геометрического объекта *pi.*

В связи с тем, что задачи упаковки и раскроя относятся к классу NP-полных, методы нахождения точного решения, включая комбинаторные и методы линейного программирования, не позволяют решать задачи большой размерности за приемлемое на практике время. Поэтому исследователями уделяется пристальное внимание разработке приближенных и эвристических методов. Эвристические алгоритмы-— это алгоритмы, основанные на правдоподобных, но не обоснованных строго предположениях о свойствах оптимального решения задачи. Среди них выделяют методы локального поиска-оптимума, в которых поиск оптимальных решений ведется в окрестности некоторого начального допустимого решения, а также конструктивные методы, в которых искомая расстановка предметов строится покомпонентно (принцип пообъектного размещения), путём добавлением нового компонента к частично построенному решению т.е. производят некоторые геометрические преобразования каждого из них.

Хорошо известно, что практически нет методов нахождения глобального оптимума для многих реальных задач нелинейного программирования. В этих случаях в основном используются и совершенствуются методы локальной оптимизации, как количественно – с улучшением их быстродействия, так и качественно – нахождение локальных оптимумов близких к глобальному.

Одним из широко используемых в этой области математического программирования классом методов является класс поисковой оптимизации. Для него поиск решения осуществляется последовательными шагами, ведущими от исходной точки из области допустимых решений (ОДР) через некоторые промежуточные значения в заданную ε-окрестность точки локального оптимума. Очень важным, в этом случае, является расположение исходной точки в ОДР.

Выделим в этом классе два подхода: методы безусловной и условной оптимизации.

Нередко для решения задач нерегулярного размещения ГО применяют последовательно несколько подходов.

Bounsaythip, Maouche и Roussel [**Maouche S., Roussel G., Intelligent lay-planning system for irregular shapes and sheet with patterns and flaws: resolution by ε-admissible tree search**, **Bounsaythip C., Maouche S., Roussel G., Algorithms for a marker making system: ε-admissible resolution**] используют локально-глобальный подход. Локальная оптимизация применяется для уменьшения границ прямоугольной оболочки двух ГО. Глобальная часть алгоритма построена на основе метода «эмуляции отжига» и «ближайшего подходящего». Дерево решений строится добавлением нового объекта к размещению подмножества объектов с использованием локальной эвристической процедуры оптимизации.

В методах моделирования геометрических преобразований можно выделить три класса:

1.  методы, основанные на моделировании движений ГО с учетом взаимного непересечения (в области допустимых размещений);

2.  методы на основе произвольных движений (параллельных переносов и вращений), в процессе которых ГО могут пересекаться друг с другом и с областью размещения;

3.  методы, основанные на процедуре занесения объекта в произвольную область.

Отличие этих методов заключается в:

- траектории, по которой производятся движения исходных ГО;

- степени сложности для реализации вращения ГО;

- возможности пересечений объектов друг с другом и с областью размещения в процессе моделирования геометрических преобразований.

Сравнивая эти классы методов можно сделать вывод, что методы, основанные на изначальном моделировании таких движений, которые не приводят к пересечению объектов между собой и с границами области размещения (моделирование "годографа") хороши тем, что они всегда дают в результате допустимое размещение (упаковку).

В связи с тем, что определяющим в понятии «годографа» является «плотное расположение объектов» или объекта и области, важным является определение «контура» объектов и области. Контур представляется в виде цепных кодов [**Гардан И., Люка М. Машинная графика и автоматизация конструирования**].

В этом случае, каждую из компонентов связности годографа можно получить при помощи моделирования плотного движения, т.е. для того, чтобы получить результирующие вершины каждой из l составляющих годографа, необходимо знать в каком направлении и на какое расстояние необходимо сдвинуть объект *Pi*, чтобы получить очередную его вершину. Предполагается, что первоначальное размещение объекта Pi производится так, что эта точка также является точкой годографа. В дальнейшем, для упрощения текста, речь будет вестись о построении годографа объекта относительно области размещения HiΩ.

В обобщенном алгоритме плотного движения объектов на базе дискретно-логического представления информации [**Верхотуров М.А. Математическое обеспечение автоматизированных систем нерегулярного размещения двух- и трехмерных геометрических объектов на базе дискретных моделей**] используются следующие процедуры:

− процедура первоначального занесения объекта в область;

− процедуры определения направления сдвига объекта;

− процедура сдвига объекта;

− процедура восстановления объекта;

Безусловно, существует большое количество разнообразных эвристических методов, применяемых для решения задач нерегулярного размещения ГО. В основном же используются два, наиболее развитых и дающих неплохие результаты, класса методов. Первый - это метаэвристики типа “simulated annealing(SA)”, “genetic algorithm(GA), “tabu search(TS)”, "ant colonie(AC)" и их модификации. И, второй, эвристические методы, разработанные специально для этого класса задач.

В алгоритмах локального поиска сначала используется механизм кодирования/декодирования расстановки предметов, для чего используются так называемые «декодеры». Декодеры - это алгоритмы, восстанавливающие эскиз упаковки и вычисляющие значение целевой функции. Для этого с помощью декодера достаточно найти прямую схему кодирования, которой является последовательность параметров (х,у, a,b), удовлетворяющая условиям допустимости упаковки. Затем с помощью декодера переходят к прямой схеме. Известны различные алгоритмы-декодеры. Наибольшее распространение получил декодер нижний-левый (Bottom Left, BL). Алгоритмы локального поиска начинают поиск с некоторого начального решения, заданного своим кодом, и итеративно пытаются заменить текущее решение на лучшее в специально определенной окрестности. В частности, к таким методам относятся методы поиска решения с помощью «генетических алгоритмов», в которых код расстановки предметов, полученных соответствующим алгоритмом декодером, рассматривается как геномом.

Среди методов решения задач размещения ГО можно выделить класс методов, основанных на порядке занесения объектов в область размещения. Действительно, если есть некоторый механизм занесения ГО в область размещения, зависящий от параметров области, параметров объекта и целевой функции, то результат решения задачи будет зависеть только от той последовательности, в которой размещаются объекты. Этот подход основан на опыте «ручного» решения задачи размещения, так долгое время, да и до сих пор, на многих предприятиях ее решает человек путем поочередного размещения укладываемых объектов и нахождения лучшего (среди полученных им) вариантов укладки.

Такой подход приводит к возможности разбиения процесса на две части:

− моделирование условий взаимного непересечения – внутренняя часть;

− формирование последовательности размещаемых объектов – внешняя (комбинаторная) часть.

# Одним из первых для решения задачи нерегулярного Р-У был разработан метод ассимптотического перебора локальных экстремумов [Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов].

Для реализации методов такого типа применяется способ **последовательно-одиночного размещения.** Суть этого метода заключается в том, что объекты размещаются последовательно по одному в соответствии с порядком в фиксированном списке. Ранее размещенные объекты считаются неподвижными. Получаемый таким образом результат напрямую зависит от порядка размещения объектов. Поэтому данный метод порождает задачу дискретной оптимизации на множестве перестановок, где каждому порядку размещения соответствует свое приближение к локальному экстремуму.

В отличие от способа последовательно-одиночного размещения в способе **выборочного размещения и удаления** приоритетный список отсутствует. В нем на каждом шаге размещения из всего множества (или подмножества) неуложенных объектов выбирается тот объект, который и укладывается в область упаковки. Также, если существует такая необходимость, возможно удаление одного или нескольких размещенных на последних i шагах объектов из области и внесении их обратно в множество объектов, подлежащих укладке.

Разрабатываемый алгоритм относится к классу последовательно-одиночного размещения и состоит в последовательном решении задач размещения очередного объекта относительно ранее установленных. Рассматриваемая алгоритмическая реализация [**Гиль Н.И. Математическое моделирование нерегулярного размещения плоских геометрических объектов в системах автоматизации проектирования**] метода основана на том, что, т.к. функция кусочно-линейная, решение находится в крайней точке области допустимых решений. В двумерном пространстве в крайних точках являются активными, по крайней мере, два ограничения. При реализации описываемого алгоритма, каждый объект будет размещаться таким образом, чтобы он касался или одновременно двух кромок области размещения, или уже размещенного объекта и любой кромки. Сечение границы ограничений о непересечении объектов между собой и с границей области размещения гиперплоскостью

называется годографом функции плотного размещения [**Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов 1975г. 240с.**] (в дальнейшем просто годографом) для области размещения и объекта. Т.о. любая крайняя точка будет пересечением пары из набора годографов очередного объекта с уже размещенными объектами и областью. Каждый шаг метода сводится к последовательному перебору крайних точек.

Метод плоскостей для решения задач раскроя- упаковки. Особенностями метода являются:

- непосредственное решение задач, а не сведение их к задачам меньшей размерности;

- использование как слойной, так и бесслойной стратегий;

- заполнение по, так называемым, приоритетным осям;

- анализ пустот и рассмотрение способов их объединения;

Под *плоским геометрическим объектом* пространства R2 будем понимать двухпараметрические точечные множества, ограниченные соответственно замкнутыми, открытыми, связными или несвязными точечными подмножествами s, граница которых определяется каноническим уравнением:

f (x, y) = 0

Здесь знак = соответствует точкам, принадлежащим границе s, знаки > и < соответствуют точкам, лежащим вне и внутри границы s, если s – замкнутая линия, или точкам, лежащим по разные стороны разомкнутой границы s.

*Движением (процессом размещения)* будем считать такие преобразования ГО, которые сохраняют его форму, изменяя лишь параметры положения (в вышеприведенном примере это x′, y′, θ). Очевидно, что эти преобразования составляют группу преобразований движения, включающую в себя параллельный перенос, поворот, центральную симметрию и их композиции.

Введем обозначения для внутренних точек ГО P – *IntP*, для точек, лежащих на границе – *clP*, также обозначим операции пересечения, объединения и вычитания двух ГО P1 и P2 соответственно [50].

Два ГО P1 и P2 могут пересекаться , не пересекаться – , касаться – , .

Под *годографом функции плотного размещения* (в дальнейшем – внешним годографом или просто годографом) *Hij* объекта *Pj* относительно *Pi* понимается такое множество положений центра объекта *Pj*, при котором выполняется условие .

Существуют регулярные и нерегулярные размещения.

*Регулярные укладки* в Rk - пространстве образованы параллельными переносами группы ГО той же размерности на векторы:

amj = bj × m , где m = ±1,± 2,...,± ∞; j ≤1,2,...,k .

Остальные размещения составляют группу нерегулярных.

Качество заполнения пространства может быть оценено при помощи численной величины, называемой *критерием размещения (заполнения)*.